بدفهمی‌های دانش‌آموزان

پایه ششم دوره ابتدایی در کار با کسرها

ملیحه دوستی
مدرس ریاضی شهرستان ساوه و کارشناس ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
ابراهیم ریحانی
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

چکیده

کسر از مفاهیم ریاضی دوره ابتدایی است که دانش‌آموزان در درک آن، با بدفهمی‌های مختلفی مواجه هستند. این بدفهمی‌ها ممکن است یادگیری‌های بعدی دانش‌آموزان را از جمله عملکرد آنان در جبر، تحت تأثیر قرار داده یا مختل نماید. هدف این پژوهش که به روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی صورت گرفته است، کشف و شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در کسرهاست. در این پژوهش، ۳۶۶ نفر از دانش‌آموزان پایه ششم شهرستان ساوه، به روش نمونه‌گیری تصادفی انتخاب شدند. داده‌ها از طریق آزمون کتبی جمع‌آوری شد. روایی این آزمون توسط چهار نفر از استادان آموزش ریاضی و پنج نفر از دبیران ریاضیِ با تجربه، تأیید شد. ضریب آلفای کرونباخ آزمون ۰/۹۰ به‌دست آمد که پایایی مناسبی را نشان می‌دهد. نتایج نشان داد که دانش‌آموزان با بدفهمی‌های متعددی در کسرها مواجه‌اند. در نظر گرفتن «یک» به‌عنوان بزرگ‌ترین کسر و «$\frac{1}{2}$» به‌عنوان کوچک‌ترین کسر، مرتب کردن کسرها بر اساس صورت یا مخرج، جمع صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم برای جمع کسرها، طرفین- وسطین کردن یا گرفتن مخرج مشترک از طریق ساده کردن مخرج‌ها با هم و صورت‌ها با هم در ضرب کسرها و در نهایت، در نظر گرفتن کسر به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل، از جمله بدفهمی‌های دانش‌آموزان است.

کلیدواژه‌ها: بدفهمی‌ها، مقایسه، هم‌ارزی، جمع و ضرب کسرها، دانش‌آموزان پایهٔ ششم

۱. مقدمه

بدفهمی[1]، تفاوت بین درک دانش‌آموزان و باورهای متخصصان نسبت به آن مفهوم در همان حوزه یادگیری است. در واقع بدفهمی، درک یک مفهوم به صورت نادرست یا ناقص است که برای دانش‌آموزانی که با آن مواجه هستند، معنادار و کارآمد است، زیرا از لحاظ ادراکی، برای آن‌ها منطقی است. علم‌الهدایی (۱۳۸۸)

بیـان می‌کند کـه «بدفهمی‌ها به‌عنـوان یک غلط یا اشتباه اتفاقی مطرح نیستند؛ بلکه در قالب یک ساختار ذهنی خوب شـکل‌یافته از ایده‌های ناقص قابل توجیه می‌باشند». از طرفی، درو[2] (۲۰۰۵) بدفهمی را به‌عنوان «به‌کارگیری نادرست یک رویه، تعمیم نادرست یا درک متفاوتـی از یک وضعیت تعریف می‌کنـد». اوزکان[3] و اوزکان (۲۰۱۲) نیز، بدفهمی را به‌عنوان دانشی تعریف می‌کنند کـه مانع یادگیری حقایق علمی می‌شـود و بر مبنای تجارب شـخصی فرد اسـت. به‌عقیدهٔ آنان، بدفهمی‌ها مفاهیم نادرسـتی هستند که درست فرض می‌شـوند و از روی عادت به‌کار برده می‌شـوند. افزون بر این‌هـا، لی[4] (۲۰۰۶) معتقد اسـت که بدفهمی‌ها، خطاهای نظام‌مندی هسـتند که دارای یک سـاختار محکم‌اند و بـه راحتی اصلاح نمی‌شـوند. به باور وی، فردی که دچار خطا می‌شـود، با اندکی تذکر می‌تواند به خطای خود پی ببرد و آن را اصلاح کند، اما کسـی که دچار بدفهمی است، اشتباه خود را توجیه می‌کند.

در برخـی از مطالعات، خطـا و بدفهمی، به‌صورت نادرستی به جای یکدیگر به کار برده می‌شوند. خطاها و بدفهمی‌هـا اگرچه به هم مرتبط هسـتند، اما با هم متفاوت بوده و نباید آن‌ها را یکسـان دانسـت. خطا به عنوان یک اشتباه[5]، خطای سهوی[6] و بی‌دقتی[7] تعریف می‌شود (لونتا و مک کوئین[8]، ۲۰۱۰) که به اعتقاد درو (۲۰۰۵)، به‌دلایل مختلفی توسط یادگیرندگان ایجاد می‌شـوند که از آن جمله، می‌توان بی‌دقتی، برداشـت نادرسـت نمادها و متون، عـدم تجربه یا دانش مرتبط با موضـوع ریاضی یا مفهوم یادگیری، و کمبود آگاهی و ناتوانی در بررسـی پاسخ داده شـده را برشمرد. وی توضیح می‌دهد که خطاهـا به‌دلیل بدفهمی‌هایی که یادگیرنـدگان در درک مفاهیـم ریاضـی دارند، بروز می‌کنند و حاکی از تفسیر نادرست ایده‌های ریاضی‌اند که از تجربه شـخصی دانش‌آموزان یا مشاهدات ناقص آنان، نتیجه می‌شود.

همچنیـن، لونتا و مک کوئیـن (۲۰۱۰) احتمال می‌دهنـد که عملکرد ضعیف در ریاضـی، با خطاها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان مرتبط است. بنابراین در وهلهٔ اول، شناسـایی بدفهمی‌ها و اصـلاح آن‌ها، برای درک درسـت یک مفهوم، از ضروریـات یاددهی- یادگیری ریاضی اسـت. علم‌الهدایی (۱۳۸۸) نیز عقیده دارد که بدفهمی، چگونگیِ شـکل‌گیری ناقصِ دانش و تجربهٔ ریاضی یـک دانش‌آموز را در یـک موقعیت یاددهی- یادگیری نشان می‌دهد که نیازمند شناسایی و ریشه‌یابی اسـت. وی همچنین، معتقد است که پس از شناسایی بدفهمی‌هـا، باید آن‌ها را اصلاح کرد، زیرا بدفهمی‌های دانش‌آموزان از مطالب درسی گذشته، موجب می‌شود کـه یادگیری مطالـب جدید و مرتبط بـا آن‌ها، دچار مشـکل گردد. در واقع، پنداشت‌های نادرست گذشته، نوعی منع و مداخلـه در موقعیت‌های جدید یادگیری ایجاد می‌کنند و آن‌ها را به سمت بدفهمی‌های جدید و یادگیری حافظه‌ای سوق می‌دهند. چنانچه به ادعای بهر و پست[9] (۱۹۹۲)، بسیاری از مشکلات دانش‌آموزان در جبر، ناشی از عدم درک صحیح کسرها است.

کسـر از جمله مباحثی اسـت که دانش‌آموزان در درک آن، بدفهمی‌های بسیاری دارند (اَشلوک، ۲۰۰۶؛ دوستی، ۱۳۹۲؛ پِتیت، لِیرد و مارسدِن، ۲۰۱۰؛ و وانگ و اندرسـون، ۲۰۰۶). عملکرد ضعیف دانش‌آموزان در آزمون‌های بین‌المللی نظیر تیمز نیز مؤید بدفهمی‌های دانش‌آمـوزان ایرانـی در رابطه با درک مفهوم کسـر اسـت. لذا در این پژوهش، بر آن شدیم تا بدفهمی‌های دانش‌آموزان را در کسرها، شناسایی کنیم.

۲. دسته‌بندی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مقایسه، جمع، ضرب و هم‌ارزی کسرها

در این بخش، به بدفهمی‌های مختلف دانش‌آموزان در مقایسـه، جمع، ضـرب و هم‌ارزی کسـرها که در تحقیقات پیشین شناسـایی شده‌اند، به تفکیک اشاره می‌شود.

۲-۱. انواع بدفهمـی دانش‌آموزان در رابطه با مقایسه کسرها

چشم‌پوشـی از صورت کسر و تعمیم نادرست این ایده که «کسر کوچکتر، مخرج بزرگتری دارد»، بدفهمی رایجی بین دانش‌آموزان اسـت. بعضی از دانش‌آموزان، این ایـده را که «از دو کسـر با صورت‌های مسـاوی، کسـری کوچکتر اسـت که مخرج بزرگتری داشـته باشد»، به نادرسـتی به مقایسه دو کسر با صورت‌های نامسـاوی تعمیم می‌دهند. مثلاً در مقایسه دو کسر $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۶}{۷}$، دانش‌آمـوزی بیان کـرده بود که چون ۷ بزرگتر از ۵ است، پس $\frac{۶}{۷}$ کوچکتر از $\frac{۱}{۵}$ است (انتخاب آمریکا، ۲۰۰۶). علاوه بر این، بسیاری از دانش‌آموزان در رابطه با مقایسـه دو کسـر، اندازه صورت و مخرج را در نظر می‌گیرنـد. این دانش‌آموزان عقیده دارند که کسـری بزرگتر است که صورت و مخرج بزرگتری داشته باشد.

مثلاً دانش‌آموزی در مقایسه $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{10}$ استدلال کرده بود که «چون ۳ بزرگتر از ۲ و ۱۰ بزرگتر از ۵ است، پس $\frac{3}{10} > \frac{2}{5}$» (لیو ولی، ۲۰۱۱ و استافیلی‌دو و ووسنیادو، ۲۰۰۴). همچنین، نتایج چندین پژوهش، نشان داده است که دانش‌آموزانی که کسر را به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل می‌شناسند، هنگام مقایسه دو کسر با صورت‌های مساوی نیز، کسر بزرگتر را کسری می‌دانند که، مخرج بزرگتری دارد. این دانش‌آموزان در مقایسه دو کسر مانند $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{4}$، گفته بودند که چون ۹ بزرگتر از ۴ است، پس $\frac{1}{4} < \frac{1}{9}$ است (بِهِر، پست و لِش، ۱۹۸۴؛ نوروزی لرکی، بخشعلی‌زاده، قربانی سی‌سخت، ۱۳۸۹ و نیکولا و پیتا- پَنتازی،۲۰۱۱). از این گذشته، به باور این دانش‌آموزان، اعداد مخلوط از کسرهای ناسره (صورت این کسرها همواره از مخرج بزرگتر است) بزرگترند، چون اعداد مخلوط دارای دو بخش صحیح و کسری هستند و اعداد صحیح از کسرها بزرگترند، مثل اینکه آنان معتقد بودند که $1\frac{3}{5} > \frac{9}{5}$ ، چون به نظر آن‌ها، اعداد صحیح همیشه از کسرها بزرگ‌تراند.

۲-۲. انواع بدفهمی دانش‌آموزان در جمع کسرها

دانش‌آموزان برای یافتن مجموع کسرها، ایده جمع اعداد صحیح را به نادرستی، به جمع کسرها تعمیم می‌دهند و صورت‌ها را باهم و مخرج‌ها را با هم جمع می‌کنند (آماتو، ۲۰۰۵ و سیگلر، تامپسون و اشنایدِر، ۲۰۱۱). مثلاً در جمع دو کسر $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{9}$، این دانش‌آموزان با این اشتباه مفهومی، کسر $\frac{3}{13} = \frac{2+1}{9+4}$ را ارائه می‌کنند. دانش‌آموزانی که مفهوم هم‌ارزی و به تبع آن مفهوم جمع کسرها را به‌نادرستی درک کرده‌اند و درک‌شان از این مفاهیم رویه‌ای است، در محاسبه مجموع دو کسر، مخرج بزرگتر را نوشته و صورت‌ها را با هم جمع می‌کنند. مثلاً دانش‌آموزی در محاسبه مجموع دو کسر، این چنین عمل کرده بود $\frac{2}{9}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{9}=\frac{3}{9}$.

۲-۳. انواع بدفهمی دانش‌آموزان در ضرب کسرها

در ضرب دو کسر، دانش‌آموزان علاوه بر ساده کردن صورت با مخرج، صورت‌ها را با هم یا مخرج‌ها را با هم ساده می‌کنند. مثلاً در ضرب دو کسر، دانش‌آموزی این چنین عمل کرده بود: $\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

دانش‌آموزان در ضرب کسرها، صورت کسر اول را در مخرج کسر دوم ضرب می‌کنند و حاصل آن را با حاصلِ ضرب صورت کسر دوم در مخرج کسر اول جمع می‌کنند، که منظور طرفین وسطین است، مثل عمل $\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=(2\times5)+(3\times7)=10+21=31$.

دانش‌آموزان رویه «معکوس و ضرب» را که در تقسیم کسرها به آن‌ها آموزش داده می‌شود، به‌نادرستی به ضرب کسرها تعمیم می‌دهند. در ضرب دو کسر، کسر دوم را معکوس می‌کنند و عمل ضرب را انجام می‌دهند. به‌عنوان مثال، $\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{10}{21}$. در عمل ضرب کسرها، دانش‌آموزان برای تبدیل عدد مخلوط به کسر، بخش صحیح را در صورتِ بخش کسری یک عدد مخلوط ضرب می‌کنند، مانند $2\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{20}{30}$. دانش‌آموزانی که مفهوم ضرب را به‌خوبی درک نکرده‌اند و یا ایده جمع را به ضرب تعمیم می‌دهند، در ضرب کسرها، مخرج کسرها را مساوی می‌کنند (یا مخرج مشترک می‌گیرند). مثلاً: $\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{10}\times\frac{5}{10}=\frac{30}{10}$. دانش‌آموزانی که مفهوم ضرب را به‌خوبی درک نکرده‌اند و یا ایده جمع را به ضرب تعمیم می‌دهند، در ضرب دو کسر با مخرج‌های مساوی، یکی از مخرج‌ها را نوشته و صورت‌ها را در هم ضرب می‌کنند که می‌توان به نمونه $\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}$ اشاره کرد.

۲-۴. انواع بدفهمی دانش‌آموزان در هم‌ارزی کسرها

دانش‌آموزانی که مفهوم هم‌ارزی را به‌درستی درک نمی‌کنند، برای یافتن کسرهای هم‌ارز، ایده جمع دو عدد صحیح را به‌نادرستی به‌کار می‌برند. زمانی که کسری مانند $\frac{3}{7}$ به دانش‌آموزان داده می‌شود و از آن‌ها خواسته می‌شود کسری هم‌ارز با آن بنویسند، بسیاری از دانش‌آموزان این پاسخ را ارائه می‌کنند: $\frac{4}{8}=\frac{3}{7}$ چون $4=1+3$ و $8=1+7$. دانش‌آموزانی که مفهوم هم‌ارزی را به‌درستی درک نمی‌کنند، برای یافتن کسرهای هم‌ارز، اختلاف بین صورت و مخرج کسر اول را از عددِ داده شده در صورت یا مخرج، کم می‌کنند

(وونـگ و ایوانز، ۲۰۰۷) مثلاً، زمانی که کسـر $\frac{۶}{۷}$ به دانش‌آموزان داده و از آن‌ها خواسـته می‌شـود کسری بنویسـند که مخرج آن ۱۴ و هم‌ارز با کسر داده شده باشد، بعضی دانش‌آموزان چون عقیده دارند که صورت کسر اول، یکی کوچکتر از مخرج آن است، عدد یک را از عددِ داده شده در مخرج کسر دوم کم می‌کنند و آن را در صورت کسر می‌نویسند: $\frac{۶}{۷} = \frac{\boxed{۱۳}}{۱۴}$

آنچه که در پیشـینه پژوهش به آن اشـاره شـد، حاکی از آن اسـت که دانش‌آموزان در کار با کسـرها، بدفهمی‌های مختلفی دارند. بدین سبب در این پژوهش، بر آن شدیم تا برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی را در رابطه با کسرها، شناسایی نماییم.

۳. روش و ابزار پژوهش

روش پژوهش حاضر، توصیفـی از نوع زمینه‌یابی اسـت. جامعه این پژوهش، تمامـی دانش‌آموزان پایه ششـم ابتدایی شهرسـتان ساوه هسـتند که در سال تحصیلی ۹۲-۹۱ مشغول به تحصیل بودند. نمونه مورد مطالعه ۳۶۶ نفر (۱۹۴ دختر و ۱۷۲ پسـر) هستند که به روش نمونه‌گیری خوشه‌ای تصادفی، انتخاب شدند. ابزار مطالعه، آزمون کتبی مرتبط با کسـرها اسـت که سـؤال‌های آن از پژوهش‌های مرتبـط و آزمون تیمز استخراج شده است. روایی این آزمون توسط چهار نفر از استادان آموزش ریاضی و پنج نفر از دبیران ریاضی با تجربه تأیید شد. پایایی آزمون نیز محاسبه شد و ضریب آلفای کرونباخ آن ۰/۹۰ به‌دست آمد که پایایی مناسبی را نشان می‌دهد.

۴. یافته‌های پژوهش

در این بخش، برخی از سؤال‌های آزمون به تفکیک، مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس با بررسی پاسخ‌های[۱۰] ارائه شده توسـط دانش‌آموزان، برخی از بدفهمی‌های آنان در رابطه با کسرها شناسایی می‌گردد.

سؤال ۱: کسـرهای زیر را از کوچک به بزرگ و از چپ به راسـت مرتب کنید. دلیل مرتب کردن خود را بنویسید.

$$۱ \quad \frac{۱}{۴} \quad \frac{۲}{۳} \quad \frac{۴}{۳} \quad \frac{۱}{۲}$$

در پاسـخ بـه ایـن سـؤال، تنهـا ۳۴/۱ درصد از دانش‌آموزان توانسـتند کسـرها را از کوچک به بزرگ مرتب کننـد. ۵۶/۸ درصد از دانش‌آموزان نتوانسـتند کسـرها را به‌درسـتی مرتب کنند. برخـی از آن‌ها در مرتب‌کردن کسرها، تنها به مخرج و برخی دیگر تنها به صورت توجه کردند. مثلاً دانش‌آموزی کسرها را بر اساس صـورت، از کوچک به بزرگ مرتب کرد. این نتایج بیان

جدول ۱. عملکرد دانش‌آموزان در سؤال ۱

انواع پاسخ‌ها	فراوانی	درصد		نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان
درست	۱۲۵	۳۴/۱	۱	با گرفتن مخرج مشترک $\frac{۱}{۴} < \frac{۲}{۳} < \frac{۴}{۳} < ۱ < \frac{۶}{۱۲} < \frac{۸}{۱۲} < \frac{۱۲}{۱۲} < \frac{۱۶}{۱۲} \rightarrow \frac{۳}{۱۲} < \frac{۶}{۱۲} < \frac{۸}{۱۲} < \frac{۱۲}{۱۲} < \frac{۱۶}{۱۲}$
			۲	$\frac{۱}{۴} < \frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} < ۱ < \frac{۴}{۳}$ چون $\frac{۱}{۴}$ به قسمت‌های کوچکی تقسیم شده و کامل نیست و از نصف کمتر است، بعد $\frac{۱}{۲}$ است که از بقیه کوچکتر است، $\frac{۲}{۳}$ از نصف بیشتر است ولی به شکل کامل نرسیده است و فقط ۱ شکل کامل است و $\frac{۴}{۳}$ یک شکل کامل و $\frac{۱}{۳}$ از شکل کامل دیگر است.
			۳	$\frac{۱}{۴} < \frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} < ۱ < \frac{۴}{۳}$ زیرا کسرها را باید به این ترتیب بنویسید: ۱) کسرهایی که صورتشان از نصف مخرجشان کوچکتر است. ۲) کسرهایی که صورتشان نصف مخرجشان است. ۳) کسرهایی که صورتشان از نصف مخرجشان بزرگتر است. ۴) کسرهایی که صورتشان با مخرجشان مساوی است (همان عدد ۱). ۵) کسرهایی که صورتشان از مخرجشان بزرگتر است.
نادرست	۲۰۸	۵۶/۸	۱	به کمک مخرج‌ها مرتب می‌کنیم. چون مخرج‌ها یکی از دیگری بزرگتر است. $\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} < \frac{۴}{۳} < \frac{۱}{۴} < ۱$
			۲	کسری که از همه کوچکتر است، کسر $\frac{۱}{۲}$ است و کسر ۱ نشان‌دهندهٔ یک شکل کامل است، پس از همه بزرگتر است. $\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} < \frac{۱}{۴} < \frac{۴}{۳} < ۱$
			۳	به خاطر این که کسری بزرگتر است که مخرج آن کوچک و کسری کوچکتر است که صورت آن بزرگتر باشد. $\frac{۱}{۴} < \frac{۲}{۳} < \frac{۴}{۳} < \frac{۱}{۲} < ۱$

خطاها به‌دلیل بدفهمی‌هایی که یادگیرندگان در درک مفاهیم ریاضـی دارند، بروز می‌کنند و حاکی از تفسیر نادرست ایده‌های ریاضی‌اند که از تجربه شخصی دانش‌آموزان یا مشاهدات ناقص آنان، نتیجه می‌شود

می‌کند که اکثر این دانش‌آموزان نتوانسته‌اند کسرها را به‌عنوان عدد درک کنند و طرحوارهٔ ذهنی آنان از کسر، همان طرحوارهٔ اعداد صحیح است و در حقیقت، آنان کسر را به‌عنوان دو عدد مستقل درک کرده‌اند. به همین دلیل در مقایسه کسرها، صورت یا مخرج کسرها را به‌تنهایی مد نظر قرار می‌دهند. همچنین، پاسخ‌های این دانش‌آموزان حاکی از آن بود که بعضی ۱ را کوچک‌ترین و بعضی دیگر آن را بزرگ‌ترین کسر می‌پندارند. نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان در جدول۱ ذکر شده است. برخی از دانش‌آموزان با اینکه توانسته بودند کسرها را به‌درستی مرتب کنند، اما در مرتب کردن ۱، یکی از دو وضعیت ذکر شده قبلی را در نظر گرفته بودند.

جدول۲. عملکرد دانش‌آموزان در سؤال ۲

انواع پاسخ‌ها	فراوانی	درصد	نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان	
درست	۱۸۹	۵۱/۶	$\frac{5}{12}$ با مخرج مشترک گرفتن $\frac{24، 25، 40، 20}{48}$	۱
			$\frac{5}{12}$، چون من در ذهنم شکل‌ها را مجسم می‌کنم و باقی ماندهٔ آن هرچه کمتر بود بزرگ‌تر است و هر چه باقی مانده آن پیشتر، آن کوچکتر از همه است.	۲
			$\frac{5}{12}$، در مقایسهٔ کسرها وقتی صورت‌ها مساوی است، کسری بزرگتر است که مخرجش کوچکتر باشد و پیش $\frac{5}{12}$، $\frac{5}{6}$ و $\frac{5}{8}$، $\frac{5}{12}$ از همه کوچکتر است و با طرفین وسطین، از $\frac{1}{2}$ کمتر است.	۳
نادرست	۱۶۲	۴۴/۳	$\frac{1}{2}$، چون صورت و مخرجش کوچکتر از آن‌هاست.	۱
			$\frac{5}{6}$ چون ۵ قسمت از ۶ قسمت برداریم، یک قسمت می‌ماند.	۲
			$\frac{1}{2}$ چون نصف است.	۳
			$\frac{1}{2}$، زیرا در کسرهای $\frac{5}{12}$، $\frac{5}{6}$ و $\frac{5}{8}$، کسر $\frac{5}{6}$ از همه کوچکتر است و $\frac{5}{6}$ را وقتی با $\frac{1}{2}$ مقایسه می‌کنیم، $\frac{1}{2}$ کوچکتر است.	۴

سؤال ۲: کوچکترین کسر در بین کسرهای زیر کدام است؟ دلیل خود را بنویسید.

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{5}{8}$ ج) $\frac{5}{6}$ د) $\frac{5}{12}$

بدفهمی‌ها بخشی از فرایند یادگیری هستند که روی یادگیری‌های بعدی دانش‌آموزان تأثیر منفی دارند. بدفهمی‌ها، ساختار شناختی محکمی دارند که به راحتی اصلاح نمی‌گردند و ناشی از بی‌دقتی و تصادفی نیستند

در این سؤال، برخی از این دانش‌آموزان $\frac{1}{2}$ را کوچکترین کسر دانستند و دلیل انتخاب خود را این‌گونه بیان کردند که «*چون $\frac{1}{2}$ نصف است*». این دانش‌آموزان $\frac{1}{2}$ را کوچکترین کسر می‌دانند. برخی دیگر چنین استدلال کردند که «*چون $\frac{1}{2}$ صورت و مخرج کوچکتری دارد، کوچکترین کسر است*». این دانش‌آموزان عقیده دارند که هر چه صورت و مخرج یک کسر کوچکتر باشد، آن کسر کوچکتر است. درک این دانش‌آموزان از کسر، درک کسر به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل است. برخی از دانش‌آموزان عقیده دارند که از دو کسر با صورت‌های مساوی، کسری بزرگتر است که مخرج آن بزرگتر و کسری کوچکتر است که مخرج کوچکتری دارد. این دانش‌آموزان در مقایسه سه کسر داده شده در مسئله با صورت‌های مساوی با ۵، با این استدلال، کسر $\frac{5}{6}$ را به‌عنوان کوچکترین کسر در نظر گرفتند. نمونه‌ای از پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان در جدول۲ آورده شده است.

سؤال ۳: حاصل جمع‌های زیر را بنویسید.

الف) $\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=$ ب) $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=$ ج) $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=$

همان‌طور که انتظار می‌رفت، دانش‌آموزان در جمع دو کسر با مخرج‌های مساوی، موفق‌تر عمل کردند. برخی از دانش‌آموزان در یافتن حاصل جمع دو کسر با مخرج‌های یکسان، از رویهٔ مخرج مشترک‌گیری استفاده کردند. آن‌ها با این‌که پاسخ درستی به مسئله دادند، اما این عملشان نشان می‌دهد که درکشان از جمع، بیشتر رویه‌ای است. ۸۷/۴ درصد از آنان توانستند حاصل جمع دو کسر را با مخرج‌های نامساوی، با یکی کردن مخرج دو کسر، بیابند. ۸۶/۹ درصد از دانش‌آموزان با تبدیل اعداد مخلوط به کسر یا با کمک قاعدهٔ جمع دو عدد

جدول ۳. عملکرد دانش‌آموزان در سؤال ۳

انواع پاسخ‌ها	فراوانی		درصد		نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان
درست	الف	۳۵۳	۹۶/۴	۱	(الف $\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$
	ب	۳۲۰	۸۷/۴		(ب $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16}{20}+\frac{15}{20}=\frac{31}{20}$
			۱	۲	(ج $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3+\frac{2}{2}=4$
	ج	۳۱۸	۸۶/۹ / ۲۰	۲	(الف $\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{32}{64}+\frac{40}{64}=\frac{72}{64}$ ۴ ۵ ۸ ۸
					(ب $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16}{20}+\frac{15}{20}=\frac{31}{20}=1\frac{11}{20}$ ۴ ۳
					(ج $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}=4$
نادرست	الف	۱۳	۳/۶	۱	(الف $\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{32}{16}+\frac{40}{16}=\frac{72}{16}$
	ب	۴۶	۱۲/۶		(ب $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{7}{9}$
	ج	۴۸	۱۳/۱		(ج $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=3\frac{2}{4}$

مخلوط «جمع کردن اعداد صحیح با هم و اعداد کسری نیز با هم» توانستند دو عدد مخلوط داده شده را با هم جمع کنند. ۱۲/۰ و ۱۲/۳ درصد از دانش‌آموزان نتوانستند به ترتیب پاسخ درستی به قسمت‌های «ب» و «ج» ارائه کنند. در حقیقت، این دانش‌آموزان کسر را به‌عنوان یک عدد درک نکرده‌اند و درکشان از کسر، به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل و طرحوارهٔ ذهنی آنان از جمع دو کسر، همان طرحوارهٔ جمع دو عدد صحیح است. بنابراین، با جمع کردن صورت کسرها با هم و مخرج آن‌ها با هم، ناموفق عمل کردند (جدول ۳).

سؤال ۴: حاصل ضرب‌های زیر را بنویسید.

(الف $\frac{2}{3}\times\frac{8}{15}=$ (ب $\frac{1}{4}\times 44=$

برخی از دانش‌آموزان، بین دو کسر مخرج مشترک گرفته و پس از محاسبه کسرهای هم‌ارز با دو کسر داده شده، با ضرب صورت‌ها با هم و نوشتن آن در صورت کسر و نوشتن مخرج مشترک در مخرج کسر، به کسر $\frac{720}{45}$ اشاره کردند. بعضی از آن‌ها، بزرگترین مخرج را بین مخرج‌های دو کسر، به‌عنوان مخرج، و

جدول ۴. عملکرد دانش‌آموزان در سؤال ۴

انواع پاسخ‌ها	فراوانی		درصد		نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان
درست	الف	۳۱۳	۸۵/۵	۱	(الف $\frac{2}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{16}{45}$
	ب	۲۶۶	۷۲/۷		(ب $\frac{1}{4}\times 44=\frac{44}{4}=11$
نادرست	الف	۵۳	۱۴/۵	۱	(الف $\frac{2}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{30}{45}\times\frac{24}{45}=\frac{720}{45}$
					(ب $\frac{1}{4}\times 44=176$ یا $\frac{1}{176}$
				۲	(الف $\frac{2}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{15}\times\frac{8}{15}=\frac{16}{15}$
					(ب $\frac{1}{4}\times 44=\frac{176}{4}$
	ب	۱۰۰	۲۷/۳	۳	(الف $\frac{2}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{5}$
					(ب $\frac{1}{4}\times 44=\frac{44}{176}$

صورت‌ها را در هم ضرب کرده و به‌عنوان مخرج نوشتند و به کسر $\frac{۱۶}{۱۵}$ اشاره کردند. درصدی از آنان هم با ساده کردن مخرج‌ها با هم و صورت‌ها با هم، پاسخ نادرستی ارائه کردند. ۲۴/۰ درصد از دانش‌آموزان در قسمت «ب» ناموفق عمل کردند. چهار نوع عملکرد متفاوت از این دانش‌آموزان دیده شد: ۱) دانش‌آموزانی که عدد صحیح را در مخرج کسر داده شده ضرب کرده و آن را در مخرج کسر جدید و صورت کسر داده شده را در صورت کسر جدید نوشته و به کسر $\frac{۱}{۱۷۶}$ اشاره کردند؛ ۲) دانش‌آموزانی که عدد صحیح را در مخرج کسر داده شده ضرب کرده و جواب آن را در صورت کسر داده شده ضرب و به عدد ۱۷۶ اشاره کردند؛ ۳) دانش‌آموزانی که عدد صحیح را، هم در مخرج و هم در صورت کسر ضرب کرده و به کسر $\frac{۴۴}{۱۷۶}$ اشاره کردند؛ ۴) دانش‌آموزانی که عدد صحیح را در مخرج کسر داده شده ضرب کرده و آن را به‌عنوان صورت کسر جدید و مخرج کسر داده شده را به‌عنوان مخرج کسر جدید نوشته و به کسر $\frac{۱۷۶}{۴}$ اشاره کردند (جدول۴).

جدول ۵. عملکرد دانش‌آموزان در سؤال ۵

انواع پاسخ‌ها	فراوانی		درصد	نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان	
درست	الف	۳۶۱	۹۸/۶	۱	الف) $\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۱۲}$
	ب	۳۳۱	۹۰/۴		ب) $\frac{۲۵}{۴۰}=\frac{۵}{۸}$
	ج	۳۰۹	۸۴/۴		ج) $\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۱۲}$
	د	۲۸۹	۷۹/۰		
نادرست	الف	۵	۱/۴	۱	الف) $\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۱۲}$
	ب	۳۵	۹/۶		ب) $\frac{۲۵}{۴۰}=\frac{۵}{۲۰۰}$
	ج	۵۷	۱۵/۶		ج) $\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۶}$
	د	۷۷	۲۱/۰		

سؤال۵: در جاهای خالی عدد مناسب را بنویسید.

الف) $\frac{۲}{۳}=\frac{\quad}{۱۲}$ ب) $\frac{۲۵}{۴۰}=\frac{۵}{\quad}$ ج) $\frac{۱}{۴}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

دومین پاسخ قسمت «ج» به عنوان گزینه «د» درنظر گرفته شده است.

عملکرد دانش‌آموزان در سؤال۵، در جدول۵ ارائه شده است. همان‌طور که نتایج نشان داد، دانش‌آموزان در قسمت «الف» از «ب» و در قسمت «ب» از «ج» و «د» موفق‌تر بودند. در پاسخ‌های نادرست، اکثر دانش‌آموزان در قسمت «ب»، به جای تقسیم ۴۰ بر ۵، با ضرب آن در ۵ به ۲۰۰ اشاره کردند. شاید پاسخ‌های نادرست این دانش‌آموزان، حاکی از تدریس رویه‌ای و عدم درک مفهوم هم‌ارزی کسرها باشد، زیرا در کلاس‌های درس، معمول است که برای حل چنین مسائلی، به دانش‌آموزان گفته شود که «ببینید صورت چند برابر شده است و مخرج را در آن عدد ضرب کنید». با اینکه در قسمت «الف» و «ب» بسیاری از دانش‌آموزان به اعداد درست اشاره کردند، اما برخی از آنان نتوانستند به کسرهای هم‌ارز با $\frac{۱}{۴}$ اشاره کنند. درصدی از آنان نیز با اضافه کردن عددی به صورت یا مخرج کسر، به مسئله پاسخ نادرستی دادند (جدول ۵). این دانش‌آموزان به دلیل اینکه مفهوم هم‌ارزی را به‌درستی درک نکرده‌اند، برای یافتن کسرهای هم‌ارز، ایده جمع دو عدد صحیح را به‌نادرستی به‌کار برده‌اند.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

همان‌طور که تحقیقات پیشین اشاره کرده‌اند، بدفهمی‌ها بخشی از فرایند یادگیری هستند که روی یادگیری‌های بعدی دانش‌آموزان تأثیر منفی دارند. بدفهمی‌ها، ساختار شناختی محکمی دارند که به راحتی اصلاح نمی‌گردند و ناشی از بی‌دقتی و تصادفی نیستند. هدف از این پژوهش، شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی درکسرها بود.

بدفهمی‌های شناسایی شده در این پژوهش، حاکی از عدم درک درست دانش‌آموزان از کسرها به‌عنوان عدد و به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل است. به این دلیل است که این دانش‌آموزان هنگام جمع، ضرب یا مقایسه کسرها، جمع، ضرب یا مقایسه اعداد صحیح را به نادرستی به کسرها تعمیم می‌دهند. بنابراین، برنامه‌درسی باید موقعیت‌های مختلفی را ارائه کند تا دانش‌آموزان بتوانند کسر را کاملاً درک کنند و از طریق آن‌ها، با مدل‌های متنوعی روبرو شوند. مطالعات نشان داده‌اند که دانش‌آموزان در کار با برخی از مدل‌ها موفق‌تر هستند. تحقیقات پیشین به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان در شناسایی جزء به کل با مدل‌های پیوسته در مقابل مدل‌های گسسته، موفق‌تر هستند.

برنامه‌درسی علاوه بر تلفیق مدل‌های مختلف کسر، باید زیرساختارهای مختلف کسر (جزء به کل، نسبت، خارج قسمت، عملگر و اندازه[11]) را نیز تلفیق کند. با معرفی نسبت‌ها به ویژه در موقعیت‌های هم‌ارزی، دانش‌آموزان می‌توانند به استراتژی‌هایی که می‌توانند در موقعیت‌های تناسب به‌کار روند، پی ببرند (توبیاس، ۲۰۰۹).

پی‌نوشت‌ها

1. Misconception
2. Drew
3. Ozkan
4. Li
5. Mistake
6. Slip
7. Inaccuracy
8. Luneta.& Makonye
9. Behr & Post

۱۰. در این پژوهش، تمامی پاسخ‌های دانش‌آموزان با فونتی مجزا (بی مروارید) و بدون دخل و تصرف ارائه شده‌اند.

11. part-whole, ratio, quotient, operator & measure

منابع

۱. علم‌الهدایی، حسن (۱۳۸۸). **اصول آموزش ریاضی**. چاپ اول، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

2. Drew, D. (2005) Children's mathematical errors and misconceptions: Perspectives on the teacher's role. In A. Hansen (Ed.), Children's errors in mathematics: Understanding common misconceptions (pp. 14-21). Glasgow: Designs and Pattent Act.

3. Ozkan, E. & Ozkan, A. (2012). Misconception in exponential numbers in IST and IIND level primary school mathematics. Social and Behavioral Sciences, 65 – 69.

4. LI. X. (2006). Cognitive Analysis of Students' Errors and Misconceptions in Variables, Equations And Functions,PhD thesis, Texas A&M University.

5. Luneta, K. and Makonye, P. J. (2010).Learners errors and misconceptions in elementary analysis: A case study of a grade 12 class in South Africa. Acta Didactica Napocenia, 3, 36- 45.Mathematics Education, 31, 89- 113.Mathematics, 12, 31- 26.

6. Behr, M. J., & Post, T. R. (1992). Teaching rational number and decimal concept. In T. R. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research-based method (2nd ed., pp. 201 – 248). Boston: Allyn & Bacon.

7. Ashlock, R. B. (2006). Error patterns in computation: using error patterns to improve instruction (9th ed). Upper Saddle River, New Jersey: Merrill.

۸. دوستی، ملیحه. (۱۳۹۲). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی از کسرها. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران.

9. Petit, Marjorie M., Laird, Robert E. & Marsden. Edwin L. (2010). A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom. New York: Routledge.

10. Wong, M., Evans, D., & Anderson, J. (2006). Developing a Diagnostic Assessment Instrument for Identifying Students' Understanding of Fraction Equivalence. The University of Sydney. ACSPRI Conference. Sydney, Australia.

11. America's choice, (2006). Mathematics Navigator: A Sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2 – 8), https://knowledgebase.pearsonschool.com, last date of access: Dec. 19 2013.

12. Liu, C., Xin, Z. & Li, X. (2011). The Development of Chinese Students' Understanding of the Concept of Fractions from Fifth to Eighth Grade. Journal of Mathematics Education, 4(2), 17 -34

13. Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of student's understanding of the numerical value of fractions. Learning and Instruction, 14, 508–518.

14. Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. Journal for Research in Mathematics Education, 15(5), 323 – 341.

۱۵. نوروزی لرکی، فرزانه، بخشعلی‌زاده، شهرناز، قربانی سی‌سخت، زینب. (۱۳۸۹). بازنمایی‌های چندگانه: فرایندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها. نشریه علمی- پژوهشی فناوری آموزش، ۵(۱)، ۱۳-۲۳.

16. Nicolaou, A. A,. & Pitta-Pantazi, D. (2011). A New Theoretical Model for Understanding Fractions at The Elementary School.

17. Amato, S. A. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th PME Conference, (2), 49-56, Melbourne: University of Melbourne.

18. Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. Cognitive Psychology, 62, 273–296.

24. Tobias, J. M. (2009). Preservice elementary teachers'developing of rational numbr understanding through the social perspective and the relationship among social and individual environments. Doctoral dissertation, University of Central Florida.